# 「論理哲学論考」の数学的解釈

加藤 諒 *

# Mathematical Interpretation of "Tractatus Logico-Philosophicus"

Ryo KATO*

The last claim "Wovon man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen" in [1] says that there exists a truth which is not represented by language. In this note, we interpret this passage mathematically.

## 1 導入

哲学者ウィトゲンシュタインの著書「論理哲学論考（原題: Tractatus Logico-Philosophicus [1]）」の最後の一文「Wovon man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen（語りえぬものについては, 沈黙せねばならない [2]）」は, 彼がこの一冊を通し証明を試みた命題の主幹であり, それは言語に依存する「論理体系の限界」を主張する. その内容の理解は, 哲学者・数学者双方に対し極めて難解なものとされている. 「論理体系の限界」という言葉に対し, ゲーデルの不完全性定理が思いだされるであろうが, ゲーデルの主張は 「適当な形式的体系において, 証明を与えることも反証を与えることも不可能な命題が存在する」ことであり, それは演繹の積み重ねにより証明された, 純粋数学におけるひとつの定理に他ならない. 一方, ウィトゲンシュタインの主張は「言語では表現不可能な真実が存在する」ことであり, 一見して数学で扱うべき命題ではなく, ゲーデルの主張とは根本的に異なる.

「形式的体系」とは, 「記号」とそれらを並べる際の「文法」, 議論の前提となる「公理」, 議論を展開する際の「推論規則」により構成された, 我々が日常用いている論理体系を抽象化した概念である. 哲学・数学の一分野である「記号論理学」では, この「形式的体系」の構造を解析することで, 人間の思考構造等を追究する.

本稿では, 数学を専門とする筆者が, ウィトゲンシュタインの「論理哲学論考」のアイデアを, 「形式的体系」を介し, 可能な限り数学の言葉に翻訳することで, その理解を現在よりも数学者にとって容易なものとすることを試みる. 特に 「真実全体が非可算濃度の集合を含む」ことを認めるか否かにより, 「ウィトゲンシュタイン哲学」と「非ウィトゲンシュタイン哲学」に哲学が二分され, 両者ともに独立してひとつの哲学を構成し得ると結論づける.

なお, 本稿は「論理哲学論考」に興味を持つ方々が読むことを想定し執筆している. よって, 数学者にとっては極めて基礎的な事実等も含めて述べていることを, 先に断っておく.

## 2 集合の濃度

本章では, 集合の濃度について簡単に説明する. 集合の定義は割愛するが, 現代数学における標準的な考え方に基づき, ZFC 集合論に基づく集合の定義を本稿でも採用する.

**定義 2.1.** 集合 $X, Y$ に対し, それらの直積の任意の部分集合

$$R \subset X \times Y = \{(x, y) \colon x \in X, y \in Y\}$$

を $X, Y$ 上の **2 項関係**という. また, $Y$ の部分集合

$$R(X) = \{y \in Y \colon (x, y) \in R \text{ となる } x \in X \text{ が存在する }\}$$

投稿年月日, 2019 年 12 月 23 日
* 新居浜工業高等専門学校 数理科

を $R$ による $X$ の**像**とよび, $X$ の部分集合

$$R^{-1}(Y)=\{x\in X\colon (x,y)\in R \text{ となる } y\in Y \text{ が存在する }\}$$

を $R$ による $Y$ の**逆像**とよぶ.

**定義 2.2.** 2 項関係 $R\subset X\times Y$ と, $X$ の部分集合 $X'$ に対し, $R$ の部分集合

$$R|_{X'}=\{(x,y)\in R\colon x\in X'\}$$

を $X'$ への $R$ の**制限**とよぶ.

**定義 2.3.** $X,Y$ 上の 2 項関係 $f\subset X\times Y$ は, 任意の $x\in X$ に対し像 $f(\{x\})$ が唯一つの要素を持つとき, $X$ から $Y$ への**写像**とよばれる. このとき $f\colon X\to Y$ と表記し, 「$f(\{x\})=\{y\}$」を「$f(x)=y$」または「$y=f(x)$」と表す.

**定義 2.4.** $f$ を集合 $X$ から集合 $Y$ への写像とする.

(1) $f(x)=y=f(x')$ ならば $x=x'$ となるとき, $f$ を**単射**という.
(2) $f(X)=Y$ となるとき, $f$ を**全射**という.
(3) $f$ が全射かつ単射のとき, **全単射**という.

**定義 2.5.** 2 つの集合 $X,Y$ を考える.

(1) $X$ から $Y$ への全単射が存在する (resp. 存在しない) とき, $|X|=|Y|$ (resp. $|X|\neq|Y|$) と表す.
(2) $X$ から $Y$ への全射が存在するとき, $|X|\geq|Y|$ または $|Y|\leq|X|$ と表す.
(3) $|X|\geq|Y|$ かつ $|X|\neq|Y|$ のとき, $|X|>|Y|$ または $|Y|<|X|$ と表す.

**定義 2.6.** $|X|$ を $X$ の**濃度**とよぶ.

**系 2.7.** 集合 $X,Y,Z$ に対し, $|X|\geq|Y|$ かつ $|Y|\geq|Z|$ ならば, $|X|\geq|Z|$ が成り立つ.

**注意 2.8.** 「全射 $f\colon X\to Y$ が存在する」ことと「単射 $g\colon Y\to X$ が存在する」ことが同値であることが容易に示せる. よって, 後者は「$|X|\geq|Y|$」と同値である.

**定理 2.9** (Bernstein Theorem)**.** 集合 $X,Y$ に対し, $|X|\geq|Y|$ かつ $|Y|\geq|X|$ ならば $|X|=|Y|$ である.

**例 2.10.** (1) (有限濃度) 空集合 $\varnothing$ の濃度を 0 とし, 帰納的に, 濃度 $n$ の集合 $X$ に対し $|X\cup\{X\}|=n+1$ とする[*1] :

$$\begin{aligned}|\varnothing|=&0,\\ |\{\varnothing\}|=&0+1=1,\\ |\{\varnothing,\{\varnothing\}\}|=&1+1=2,\\ &\vdots\end{aligned}$$

例えば, 集合 $A=\{$ リンゴ, みかん $\}$ を考えると, $A$ から $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ への全単射

$$f=\{(\text{リンゴ},\varnothing),(\text{みかん},\{\varnothing\})\}\subset A\times\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$$

が存在するため, $|A|=|\{\varnothing,\{\varnothing\}\}|=2$ が得られる. 空集合 $\varnothing$ または濃度がある自然数 $n$ となる集合を**有限集合**とよぶ.

(2) (可算濃度) 自然数の集合 $\mathbb{N}$ の濃度 $|\mathbb{N}|$ を $\aleph_0$ と表記し, **可算濃度**とよぶ:

$$|\mathbb{N}|=\aleph_0.$$

濃度が $\aleph_0$ の集合を**可算集合**という.

(3) 集合 $X$ が有限集合または可算集合であるとき, $X$ を**高々可算な集合**とよぶ.
(4) 集合 $X$ が $|X|>|\mathbb{N}|=\aleph_0$ を満たすとき, $X$ の濃度を**非可算濃度**とよび, 非可算濃度を持つ集合を**非可算集合**という.

---

[*1] この議論は, 自然数の存在を前提としているが, 逆に, 「$0=\varnothing$」とし, 帰納的に「$n+1=n\cup\{n\}$」とすることで自然数を構成できる.

**注意 2.11.** 0 以上 1 以下の実数の集合 $[0,1]$ は非可算濃度を持つ．[*2]

**例 2.12.** 直積集合 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ を考えると, これは明らかに $|\mathbb{N}|\le|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$ を満たす．一方, 写像 $f\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を

$$f(i,j)=\begin{cases} i+(j-1)^2 & i\le j \\ i^2-j+1 & i>j \end{cases}$$

として与えると, 写像 $f$ は単射となるため, 注意 2.8 より $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|\le|\mathbb{N}|$ が得られる．よって, 定理 2.9 より

$$|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|=\aleph_0$$

が成り立ち, 集合 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ は可算集合となる．

**例 2.13.** 任意の整数 $k$ に対し, 0 より大きい $k$ 進整数の集合 $\mathbb{N}_k$ を考える．このとき, 写像 $f\colon\mathbb{N}_k\to\mathbb{N}$ を

$$f(y_0y_1\ldots y_\ell)=y_0\cdot k^\ell+y_1\cdot k^{\ell-1}+\cdots+y_{\ell-1}\cdot k+y_\ell \quad (0\le y_i<k,\ y_0\ne 0)$$

として与えると, 写像 $f$ は単射となる．よって, 注意 2.8 より

$$|\mathbb{N}_k|\le|\mathbb{N}|=\aleph_0{}^{*3}$$

が得られる．

**例 2.14.** 整数の集合 $\mathbb{Z}$ と有理数の集合 $\mathbb{Q}$ を考える．任意の $x\in\mathbb{Q}$ は, 既約分数表示 $x=x_1/x_2$ $(x_2>0)$ を持つ．ここで, 写像 $f\colon\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ を $f(x)=(x_1,x_2)$ として与えると, これは well-defined な単射となる．また, 写像 $g'\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ を

$$g'(z)=\begin{cases} 2z & 2\mid z \\ 1-2z & 2\nmid z \end{cases}$$

で与えると $g'$ は単射となる．よって, 写像 $g\colon\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ を $g(z,w)=(g'(z),g'(w))$ で与えると, これも単射となる．明らかに $|\mathbb{N}|\le|\mathbb{Q}|$ であることから, 例 2.12 より

$$|\mathbb{Q}|\le|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|\le|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|\le|\mathbb{Q}|$$

が得られ, 系 2.7 と定理 2.9 より

$$|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|=\aleph_0$$

が成立する．

## 3 形式的体系

**定義 3.1.** 次の 4 つのデータにより構成されるシステムを**形式的体系**という:

(1) 有限集合 $S$
(2) $S$ の要素（**記号**）を並べる際の規則（**文法**）
(3) 文法を満たす有限の長さの記号列（**公理**）の集合 $A$
(4) 1 つあるいは複数の記号列から, 別の記号列を導出するための規則（**推論規則**）

**定義 3.2.** ある形式的体系において, 公理として与えられている記号列に, 推論規則を有限回適用することで得られる記号列を**定理**という．

**例 3.3.** 次のような形式的体系を考える:

- 記号: $S=\{0,1\}$.

[*2] 集合 $[0,1]$ が高々可算と仮定することで得られる全射 $f\colon\mathbb{N}\to[0,1]$ に対し, $f(i)=0.x_{i,1}x_{i,2}x_{i,3}\ldots$ とする．ここで, $x_{i,k}$ は 0 以上 9 以下の整数であり, 等式 $1.000\ldots=0.999\ldots$ については $1.000\ldots$ の表記を採用することとする．このとき, $y_{i,k}$ を $x_{i,k}$ とは異なる 0 以上 9 以下の整数とすると, 実数 $y=0.y_{1,1}y_{2,2}y_{3,3}\ldots$ は像 $f(\mathbb{N})$ に含まれず, $f$ の全射性に矛盾する．よって, $|[0,1]|\le\aleph_0$ が否定され, ZFC 集合論における選択公理を適用することで, $|[0,1]|>\aleph_0$ が示される．この手法は, カントールの**対角線論法**とよばれる．

[*3] 実際は $|\mathbb{N}_k|=\aleph_0$ がいえるが, ここでは割愛する．

- 文法:
  (1) 記号 0 の後には 0 または 1 を置ける.
  (2) 記号 1 の後には 1 を置ける.
  (3) 上記 2 つの条件を両方とも満たす記号列のみ, 文法をみたすものとする.
- 公理: $A = \{00, 10\}$.
- 推論規則:
  (1) 任意の記号列に対し, その後に記号 1 を加えた記号列が導出できる.
  (2) 記号列の最後の 2 つが 00 の場合は, その後に 0 を加えた記号列が導出できる.

このとき, 次のように上から順に推論規則を適用することで, 記号列 00011 が導出される:

| | |
|---|---|
| 00 | (公理) |
| 000 | (推論規則 (2)) |
| 0001 | (推論規則 (1)) |
| 00011 | (推論規則 (1)) |

よって, この形式的体系において, 記号列 00011 は定理である. 一方, 記号列 11 はこの体系において文法をみたすが, 定理ではない.

我々が日常扱っている論理体系は, 例 3.3 よりも遥かに複雑なひとつの形式的体系を成していると考えられる. ウィトゲンシュタインの主張する「論理体系の限界」が任意の形式的体系に対しどのように翻訳され得るかが, 本稿の主題である.

## 4 主結果

以降の議論は, ある与えられた形式的体系 $\mathcal{S}$ のうえで考えているものとする. $\mathcal{S}$ において文法を満たす有限の記号列の集合を $L$ と表す.

**定義 4.1.** 集合 $L$ の要素を**事態**とよぶ[*4].

**補題 4.2.** 集合 $L$ は高々可算な集合である.

*Proof.* 形式的体系 $\mathcal{S}$ の記号の集合を $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ とする. このとき, 任意の事態 $x \in L$ は $x = x_{i(1)}x_{i(2)} \ldots x_{i(\ell)}$ のかたちで表される. 正の $k$ 進整数の集合 $\mathbb{N}_k$（例 2.13）に対し, 写像 $f\colon L \to \mathbb{N}_k$ を

$$f(x) = i(1)i(2)\ldots i(\ell)$$

として与えると, これは単射となる. よって, 注意 2.8 と例 2.13 より $|L| \le |\mathbb{N}_k| \le \aleph_0$ が示され, 系 2.7 より $|L| \le \aleph_0$ が得られる. □

**定義 4.3.** 共通部分を持たない 2 つの集合 $T$, $F$ に対し, 任意の写像

$$j\colon L \to T \cup F$$

を**判定**とよぶ. $L$ の要素 $x$ に対し, $x$ が**成立する** (resp. **成立しない**) とは, $j(x) \in T$ (resp. $j(x) \in F$) となることをいう.

**注意 4.4.** 我々が日常的に考察する形式的体系では, ある事態 $x \in L$ に対し, 「$x$ の否定」と呼ばれる事態 $\neg x \in L$ が存在することが常である. この際, 我々は感覚的に「$j(x) \in T$」と「$j(\neg x) \in F$」を同値と考えたくなるが, 判定 $j$ にそのような条件は課されていない. よって「$x$ が成立する」ことと「$\neg x$ が成立する」ことは互いに独立した主張であり, それらが成立するか否かは判定 $j$ をどのように与えるかのみに依存する.

**定理 4.5.** 集合 $T$ の濃度が非可算ならば, 逆像 $j^{-1}(T)$ への判定 $j$ の制限 $j|_{j^{-1}(T)}\colon j^{-1}(T) \to T$ は全射ではない.

*Proof.* 補題 4.2 より, 集合 $L$ の濃度は高々可算である. よって

$$|j^{-1}(T)| \le |L| \le \aleph_0 < |T|$$

となり, 選択公理より我々の主張が示される. □

[*4] ウィトゲンシュタインの原著 [1] での「Tetsache」, 野矢茂樹氏の訳書 [2] での「事態」が, これに対応する.

定義 4.1 のこころとしては, 集合 $T$ を「我々の世界で成立していることの一部」, 集合 $F$ を「我々の世界で成立していないことの一部」と考えている*5. つまり, 我々の論理体系において構成される文章 $x \in L$ に対し, 判定 $j$ による像 $j(x)$ が, $x$ の表す現実における何かしらの状況と対応し, かつそれが $T$ と $F$ どちらに含まれるかで, 現実での成立・不成立を表しているという解釈である. ウィトゲンシュタインの主張する「論理体系の限界」は「言語では表現不可能な真実が存在する」ことであり, その主張は, 定理 4.5 により, 以下のかたちで翻訳され得る:

**系 4.6.** 集合 $T$ の濃度が非可算ならば, $j(L)$ に含まれない $T$ の要素が存在する.

## 5 結論

我々の論理体系, より一般に任意の形式的体系において, 文法をみたす記号列の集合は高々可算である. ここで, 注意 2.11 にて述べた「集合 $[0,1]$ の濃度は非可算である」ことに注目する. 我々が存在するこの時空において, 「時間」が数学的な意味で連続と仮定する. 現在本稿を読んでいただいているあなたを「わたし」とし, 「『わたし』は $x$ 秒間この世界に存在している」という文言を $\exists(x)$ とするとき

$$T = \{\exists(x) \colon x \in [0,1]\}$$

なる集合は「この世界で成立していることの一部」として抽出できる*6. このとき, $T$ から $[0,1]$ への全単射

$$f = \{(\exists(x), x) : x \in [0,1]\} \subset T \times [0,1]$$

が存在することから, $|T| = |[0,1]| > \aleph_0$ が成立し, 「この世界で成立していることの一部」として非可算濃度の集合が構成できる. よって, 系 4.6 により, ウィトゲンシュタインの主張の正当性が認められる.

**注意 5.1.** 我々の論理体系が, 集合 $[0,1]$ を含む実数の集合 $\mathbb{R}$ を許容していることが, 上の主張と矛盾しているように思われる. 実際, 例 2.14 より有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は可算濃度を持ち, Dedekind 切断*7 のアイデアにより, 集合 $\mathbb{Q}$ と有限の記号列（文章）により集合 $\mathbb{R}$ が定義できる. しかしながら, 「我々の論理体系により**実際に構成できる**実数」全体の濃度は高々可算であり, 本稿の内容とこの事実との間で矛盾は生じ得ない. 例えば, 無理数 $\sqrt{2}$ は, 事態「2 乗すると 2 となる正の数が存在する」が判定 $j$ により $T$ の要素へ写されることにより与えられる数とも考えられるし,

$$A = \left\{q \in \mathbb{Q} \colon q^2 \leq 2\right\}, B = \left\{q \in \mathbb{Q} \colon q^2 > 2\right\}$$

により与えられる対 $(A, B)$ に対し, 事態「$(A, B)$ は $\mathbb{Q}$ における Dedekind 切断である」の判定 $j$ による像が $T$ に含まれることから与えられる数とも考えられる. このとき, 無理数 $\sqrt{2}$ は我々の論理体系のなかで有限の記号列により与えられ, 文言 $\exists(\sqrt{2})$ が確かに我々の論理体系の範囲で構成できる. しかしながら, 「任意の $x \in [0,1]$ に対し, 文言 $\exists(x)$ に対応する有限の記号列が存在する」ことと「集合 $T = \{\exists(x) \colon x \in [0,1]\}$ の要素全体を有限の記号列で構成できる」ことは異なっており, 実際は後者は不可能であることが系 4.6 から示される. このふたつの主張を混同すると, あたかも本稿の議論が矛盾を含むように感じられる.

上では, ウィトゲンシュタインの主張を正しいとしたが, それは「時間が連続である」という仮定のもとでの結論である. 実際は, この仮定を正しいとする根拠は無く, 我々の存在する時空が数学的な意味で連続でない（離散的）ならば, 上の結論は得られない. 仏教における刹那*8 のような, 我々が実感できないほど細かいところに, 時間の最小単位が存在している可能性も視野に入れる必要がある. 現代では 1/75 秒ほどの細かさなら観測機器により計測可能であるため, 刹那の正当性は認めがたいが, 遥かに小さな最小単位の存在は否定できない. 理論物理学におけるループ量子重力理論では「時空に最小単位が存在する」ことが仮定されており, 現代の量子重力理論の最有力候補のひとつとされている. 「時空に最小単位が存在する」ならば, この時空に生じるあらゆる事実全体が高々可算の集合をなす可能性が否めず, ウィトゲンシュタインの主張する「論理体系の限界」を（少なくとも本稿のアイデアでは）示すことができない.

現代科学では, 我々が存在するこの時空が連続的か離散的かを判明させることは不可能であり, そもそも, この問題は科学では解決不可能な類の問題とさえ考えられる. かくして, 本稿の結論として, ウィトゲンシュタインの主張を是とする「ウィトゲン

*5 「世の中の真実全体」という集まりが ZFC 集合論における集合の定義を満たさない可能性を考慮し, ここでは「全て」ではなく「一部」を考えている.

*6 実際に容認できるのは「『わたし』が現在この瞬間存在する」ことのみであろうが, とりあえず本稿ではこのように考えることとする.

*7 集合 $\mathbb{Q}$（より一般に, 任意の順序集合）の空でない 2 つの部分集合 $A, B$ が「$A \cup B = \mathbb{Q}$」, 「$A \cap B = \varnothing$」, 「任意の $a \in A$ と任意の $b \in B$ に対し $a < b$」の 3 つの条件を満たすとき, 対 $(A, B)$ を $\mathbb{Q}$ の **Dedekind 切断**という. $\mathbb{Q}$ の Dedekind 切断全体の集合から実数の集合 $\mathbb{R}$ への全単射となる写像が構成できることから, 集合 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ の Dedekind 切断により定義できる.

*8 仏教において, 時間の最小単位と考えられている概念. 諸説あるが, 約 1/75 秒とされている.

シュタイン哲学」と, ウィトゲンシュタインの主張を非とする「非ウィトゲンシュタイン哲学」が両者ともに否定されず, どちらの立場で論ずるかにより, それ以降で哲学が二分されることを提唱する.「ウィトゲンシュタイン哲学」の立場では, 我々の論理体系では表現できぬ真実に対し「語りえぬものについては, 沈黙せねばならない」. 一方,「非ウィトゲンシュタイン哲学」の立場では, 我々の存在するこの時空が最小単位を持ち, 更にその最小単位が高々可算個までしか入らない程度の大きさであると仮定することで, 全ての真実は適当な形式的体系により表現可能であると主張できる. そして, この時空がそのような離散的なものであるならば, ウィトゲンシュタインの主張は確かに否定され, 全ての真実の追究のため, 我々は安心して哲学・数学の研究に没頭することができる.

## References

[1] L. Wittgenstein. *Tractatus logico-philosophicus, Logisch-philosophische Abhandlung,* Suhrkamp, Frankfurt am Main 2003.
[2] ウィトゲンシュタイン著, 野矢茂樹訳, 「論理哲学論考」, 岩波書店, 2003 年.
[3] 野矢茂樹, 「ウィトゲンシュタイン『論理哲学論考』を読む」, ちくま書房, 2006 年.